

INF9340 Devoir 5

Ce devoir est à remettre sur papier au secrétariat ou par courriel en format PDF avant 23h59 le dimanche 5 avril 2026. Assurez-vous d'inclure votre nom et code permanent. Un gabarit LaTeX est fourni. Tous les problèmes sont assujettis à la politique du tableau noir (voir le site web du cours pour les détails de cette politique). N'oubliez pas que si vous utilisez la politique du tableau noir, vous devez indiquer avec qui vous avez collaboré. Toute utilisation soupçonnée de l'IA générative fera l'objet du rapport d'infraction du règlement 18.

Quantification

QUESTION 1 (10 points). *En logique classique, les prédicats suivants sont équivalents :*

$$\forall(x : s) P(x) \quad \neg\exists(x : s) \neg P(x).$$

Pour chacun des jugements intuitionnistes suivants, démontrez-le ou donnez un $P(x)$ et une brève explication pour justifier qu'il n'est pas démontrable :

- $(\forall(x : s) P(x)) \supset \neg\exists(x : s) \neg P(x)$ true
- $(\neg\exists(x : s) \neg P(x)) \supset (\forall(x : s) P(x))$ true

Logique classique

On écrit A true pour signifier que la proposition A est vraie en déduction naturelle classique. La déduction naturelle classique a les mêmes règles que la déduction naturelle intuitionniste, sauf qu'on remplace la règle d'élimination de l'absurde intuitionniste par la règle d'élimination de l'absurde classique indiquée ci-bas.

QUESTION 2 (25 points). Soit $\Gamma_c = (A_1 \text{ true}, \dots, A_n \text{ true})$ et $\neg\neg\Gamma_i = (\neg\neg A_1 \text{ true}, \dots, \neg\neg A_n \text{ true})$. Démontrez le théorème de Glivenko : $\Gamma_c \vdash B$ true en logique classique propositionnelle si et seulement si $\neg\neg\Gamma_i \vdash \neg\neg B$ true en logique intuitionniste propositionnelle.

La direction de gauche à droite se fera par induction sur la dérivation de $\Gamma_c \vdash A$ true. Remettez seulement les cas suivants de cette démonstration :

- le cas d'hypothèse

$$\frac{}{\Gamma_c, A \text{ true} \vdash A \text{ true}}$$

- le cas d'introduction de la conjonction
- un des deux cas d'élimination de la conjonction
- l'introduction de l'implication
- l'élimination de l'implication
- l'élimination de l'absurde classique

$$\frac{\Gamma_c, \neg A \text{ true} \vdash \perp \text{ true}}{\Gamma_c \vdash A \text{ true}}$$

Remettez la démonstration entière de la direction de droite à gauche.

Si vous utilisez l'affaiblissement, veuillez indiquer où vous l'avez utilisé.

QUESTION 3 (5 points). *Pour comprendre le besoin de plongements plus raffinés pour la logique du premier ordre (par exemple, ceux de Gentzen, de Kolmogorov, etc.), essayez de faire le cas qui correspond à l'introduction de la quantification universelle. Expliquez pourquoi vous n'y arrivez pas. (Il y a déjà un contre-exemple dans les notes de cours.)*

Arithmétique (faire une des deux questions)

Une fonction $\phi : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, $n \geq 0$, est **primitive réursive** :

– si elle est une des fonctions initiales

$$Z(x) = 0 \quad \text{fonction constante 0 où } n = 1$$

$$S(x) = x + 1 \quad \text{fonction successeur où } n = 1$$

$$U_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i \quad \text{fonction projection où } n \geq i \geq 1$$

– si elle est une composition

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \theta(\chi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \chi_m(x_1, \dots, x_n))$$

de fonctions primitives récurives $\theta : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$ et $\chi_1, \dots, \chi_m : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$

– si elle est définie par récurrence sur la première variable :

$$\phi(0, x_2, \dots, x_n) = \psi(x_2, \dots, x_n)$$

$$\phi(y + 1, x_2, \dots, x_n) = \chi(y, \phi(y, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$$

où $n \geq 1$ et où $\psi : \mathbb{N}^{n-1} \rightarrow \mathbb{N}$ et $\chi : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ sont des fonctions primitives récurives.

Par exemple, la fonction constante $C_k^m : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $C_k^m(\vec{x}) = k$ est primitive réursive, car elle est la composition de k copies de S avec Z et la première projection :

$$C_k^m(\vec{x}) = S^k(Z(U_1^m(x)))$$

La fonction d'addition $p(x, y) = x + y$ est primitive réursive, car :

$$p(0, y) = U_1^1(y)$$

$$p(x + 1, y) = S(U_2^3(x, p(x, y), y))$$

Elle correspond à la définition informelle :

$$p(0, y) = y$$

$$p(x + 1, y) = S(p(x, y))$$

Remarque. Dans votre cours de complexité au premier cycle, vous avez peut-être utilisé la version de la définition où $Z : \mathbb{N}^0 \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction nulle, c'est-à-dire, où $Z() = 0$ est une fonction constante à zéro argument. Dans ce cas, la fonction constante $C_k^m(x)$ est donnée par la composition $C_k^m(\vec{x}) = S^k(Z())$. Vous êtes autorisés d'utiliser cette variante dans la question 4.

QUESTION 4 (16 points). *Démontrez que les fonctions suivantes sont primitives récurives :*

(1) $m(x, y) = x \times y$

(2) $P(x) = \max(0, x - 1)$

(3) $s(x, y) = \max(0, x - y)$ (soustraction tronquée)

(4) $\text{ite}(x, y, z) = \begin{cases} y & \text{si } x = 0 \\ z & \text{sinon} \end{cases}$

(5) $r(x) = x \bmod 2$ (reste de x divisé par 2)

(6) $q(x) = x/2$ (quotient de x divisé par 2)

(7) $\phi(x) = \text{pgcd}(x, 2)$ (plus grand commun diviseur)

(8) $\psi(x) = \text{ppcm}(x, 2)$ (plus petit commun multiple)

N'oubliez pas que l'arithmétique de Heyting est formée par les règles de déduction naturelle intuitionnistes pour le calcul des prédicats en plus des règles suivantes :

$$\begin{array}{c}
 \frac{n : \mathbb{N}}{n = n \text{ true}} \quad \frac{Sx = 0 \text{ true}}{P \text{ true}} \quad \frac{n : \mathbb{N} \quad P(0) \text{ true} \quad \frac{P(S(m)) \text{ true}}{\vdots} \quad P(n) \text{ true}}{P(n) \text{ true}} \quad \frac{x}{\overline{m : \mathbb{N}} \quad \overline{P(m) \text{ true}}} \\
 \frac{t' = t \text{ true}}{t = t' \text{ true}} \quad \frac{t = t' \text{ true} \quad t' = t'' \text{ true}}{t = t'' \text{ true}} \quad (\mathbb{NE}^{m,x})
 \end{array}$$

QUESTION 5 (16 points). *En arithmétique de Heyting, on peut définir $P \vee Q$ par le prédicat*

$$\exists(x : \mathbb{N}) ((x = 0 \supset P) \wedge (x \neq 0 \supset Q)),$$

où $x \neq 0$ est une abréviation de $(x = 0) \supset \perp$. Démontrez que les règles habituelles d'introduction de la disjonction et la règle d'élimination de la disjonction sont des règles dérivées si l'on prend cette définition de $P \vee Q$.

1 Révisions

Le 28 mars 2026, le devoir a été modifié :

- la notation des quantificateurs a été uniformisée avec celle utilisée dans les notes de cours : $\forall x : s.P(x)$ est devenu $\forall(x : s) P(x)$
- pour faciliter la question 4, les fonctions nulles (dont la variante nulle de Z) sont autorisées.