

INF9340 Devoir 4

Ce devoir est à remettre sur papier au secrétariat ou par courriel en format PDF avant 23h59 le dimanche 22 mars 2026. Assurez-vous d'inclure votre nom et code permanent. Un gabarit LaTeX est fourni. Tous les problèmes sont assujettis à la politique du tableau noir (voir le site web du cours pour les détails de cette politique). N'oubliez pas que si vous utilisez la politique du tableau noir, vous *devez* indiquer avec qui vous avez collaboré.

Ce devoir comporte trois sections et le temps estimé pour compléter chaque est 1 heure. SVP, faites-moi savoir si certaines questions vous ont pris plus longtemps que j'avais estimé. Les questions sont divisées en petites sous-questions pour faciliter la correction. J'ai inclus un sommaire de ce qu'on a vu ces dernières semaines pour que ceux et celles qui étaient absents puissent compléter le devoir en attendant que je termine les notes de cours.

La communication sera évaluée. Assurez-vous que vos réponses sont bien structurées et que le lecteur n'ait pas besoin de deviner ce que vous souhaitiez lui communiquer !

Terminaison faible (40 points)

Vous démontrerez que les termes clos d'un λ -calcul avec des produits et des valeurs booléennes terminent sous la réduction *call-by-name*. Vous utiliserez une version très simplifiée de la technique des prédicats logiques vus en classe. Pour commencer, voici un petit rappel de la syntaxe et de la sémantique du fragment qui nous intéresse, ainsi que de l'approche à suivre.

Soit les termes M, N générés par la grammaire suivante :

$$M, N ::= x \mid \text{tt} \mid \text{ff} \mid \lambda x.M \mid MN \mid \langle M, N \rangle \mid \text{fst}(M) \mid \text{snd}(M)$$

Les **termes clos** sont ceux sans variables libres, c'est-à-dire, les termes M tels que $\text{FV}(M) = \emptyset$. Les **variables libres** $\text{FV}(M)$ d'un terme M sont définies par récurrence sur M :

$$\begin{aligned} \text{FV}(x) &= \{x\} & \text{FV}(\text{tt}) &= \emptyset & \text{FV}(\text{ff}) &= \emptyset \\ \text{FV}(\lambda x.M) &= \text{FV}(M) \setminus \{x\} & \text{FV}(MN) &= \text{FV}(M) \cup \text{FV}(N) & \text{FV}(\langle M, N \rangle) &= \text{FV}(M) \cup \text{FV}(N) \\ \text{FV}(\text{fst}(M)) &= \text{FV}(M) & \text{FV}(\text{snd}(M)) &= \text{FV}(M) \end{aligned}$$

Les termes sont typés par des types A, B générés par la grammaire suivante :

$$A, B ::= \text{bool} \mid A \times B \mid A \rightarrow B,$$

où bool désigne les valeurs booléennes, $A \times B$ le produit cartésien, et $A \rightarrow B$ les fonctions de A vers B . La métavariable Γ désigne des contextes $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$ où $n \geq 0$. Les règles de typage sont :

$\Gamma \vdash M : A$	Le terme M a le type A en supposant Γ	
$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A} [\text{var}]$	$\frac{}{\Gamma \vdash \text{tt} : \text{bool}} [\text{boolI}_{\text{tt}}]$	$\frac{}{\Gamma \vdash \text{ff} : \text{bool}} [\text{boolI}_{\text{ff}}]$
$\frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : A \times B} [\times\text{I}]$	$\frac{\Gamma \vdash M : A \times B}{\Gamma \vdash \text{fst}(M) : A} [\times\text{E}_1]$	$\frac{\Gamma \vdash M : A \times B}{\Gamma \vdash \text{snd}(M) : B} [\times\text{E}_2]$
$\frac{\Gamma, u : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda u.M : A \rightarrow B} [\rightarrow\text{I}^u]$	$\frac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B} [\rightarrow\text{E}]$	

On suppose la réduction *call-by-name* suivante :

$$\boxed{M \longrightarrow_{\text{cbn}} M'} \quad \text{Le terme } M \text{ se réduit à } M' \text{ en une étape}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\text{fst}(\langle M, N \rangle) \longrightarrow_{\text{cbn}} M} [\text{cbn/fst/pair}] \quad \frac{}{\text{snd}(\langle M, N \rangle) \longrightarrow_{\text{cbn}} N} [\text{cbn/snd/pair}] \\
 \frac{M \longrightarrow_{\text{cbn}} M'}{\text{fst}(M) \longrightarrow_{\text{cbn}} \text{fst}(M')} [\text{cbn/fst}] \quad \frac{M \longrightarrow_{\text{cbn}} M'}{\text{snd}(M) \longrightarrow_{\text{cbn}} \text{snd}(M')} [\text{cbn/snd}] \\
 \frac{}{(\lambda x.M)N \longrightarrow_{\text{cbn}} [N/x]M} [\text{cbn/app/lam}] \quad \frac{M \longrightarrow_{\text{cbn}} M'}{MN \longrightarrow_{\text{cbn}} M'N} [\text{cbn/app}]
 \end{array}$$

On écrit $\longrightarrow_{\text{cbn}}^*$ pour la clôture transitive et réflexive de $\longrightarrow_{\text{cbn}}$. Elle est définie par induction par les règles :

$$\frac{}{M \longrightarrow_{\text{cbn}}^* M} [\text{refl}] \quad \frac{M \longrightarrow_{\text{cbn}} M' \quad M' \longrightarrow_{\text{cbn}}^* N}{M \longrightarrow_{\text{cbn}}^* N} [\text{step}]$$

La propriété suivante vous sera probablement utile :

PROPOSITION 1. Si $M \longrightarrow_{\text{cbn}}^* N$ et $N \longrightarrow_{\text{cbn}}^* P$, alors $M \longrightarrow_{\text{cbn}}^* P$.

Une **substitution clôturante** $\sigma : \Gamma$ où $\Gamma = x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$ est une liste $M_1, \dots, M_n$ telle que $\vdash M_i : A_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Une substitution clôturante $\sigma : \Gamma$ décrit une substitution simultanée des termes clos M_i pour les variables x_i où $1 \leq i \leq n$. Où $\sigma = M_1, \dots, M_n$ et $\Gamma = x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$, on écrit $[\sigma]N$ pour le résultat de la substitution simultanée $[M_1, \dots, M_n/x_1, \dots, x_n]N$.

PROPOSITION 2 (SUBSTITUTION). Si $\sigma : \Gamma$ et $\Gamma \vdash M : B$, alors $\vdash [\sigma]M : B$.

Le prédicat logique $\text{TH}_A(-)$ de **terminaison héréditaire** sur les termes clos est défini par récurrence sur le type A :

- $\text{TH}_{\text{bool}}(M)$ si et seulement si $M \longrightarrow_{\text{cbn}}^* \text{tt}$ ou $M \longrightarrow_{\text{cbn}}^* \text{ff}$;
- $\text{TH}_{A \times B}(M)$ si et seulement si $M \longrightarrow_{\text{cbn}}^* \langle M_1, M_2 \rangle$ et $\text{TH}_A(M_1)$ et $\text{TH}_B(M_2)$; et
- $\text{TH}_{A \rightarrow B}(M)$ si et seulement si $M \longrightarrow_{\text{cbn}}^* \lambda x.M'$ et $\text{TH}_B([N/x]M')$ pour tout $\text{TH}_A(N)$.

Le prédicat logique $\text{TH}_\Gamma(-)$ de terminaison héréditaire sur les substitutions clôturantes est analogue :

- $\text{TH}_\Gamma(\sigma)$ où $\Gamma = x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$ et $\sigma = M_1, \dots, M_m$ si et seulement si $m = n$ et $\text{TH}_{A_i}(M_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

QUESTION 1 (10 points). Pour compléter la question 2, vous aurez potentiellement besoin des lemmes suivants. Remettez la démonstration d'un lemme si et seulement si vous l'avez utilisé dans la démonstration de la question 2.

- (1) Si $\text{TH}_A(M)$ et $M \longrightarrow_{\text{cbn}}^* N$, alors $\text{TH}_A(N)$.
- (2) Si $M \longrightarrow_{\text{cbn}}^* N$ et $\text{TH}_A(N)$, alors $\text{TH}_A(M)$.
- (3) La réduction $\longrightarrow_{\text{cbn}}$ est déterministe : si $M \longrightarrow_{\text{cbn}} N$ et $M \longrightarrow_{\text{cbn}} N'$, alors $N = N'$.
- (4) Si $\vdash M : A$ et il n'existe pas de N tel que $M \longrightarrow_{\text{cbn}} N$, alors $\text{TH}_A(M)$.
- (5) Si $M \longrightarrow_{\text{cbn}}^* N$, alors $\text{fst}(M) \longrightarrow_{\text{cbn}}^* \text{fst}(N)$.
- (6) Si $M \longrightarrow_{\text{cbn}}^* M'$, alors $MN \longrightarrow_{\text{cbn}}^* M'N$.

QUESTION 2 (30 points). Démontrez par induction sur $\Gamma \vdash M : A$ que $\text{TH}_A([\sigma]M)$ pour toute substitution clôturante $\sigma : \Gamma$ telle que $\text{TH}_\Gamma(\sigma)$. Remettez seulement les cas suivants : $[\text{var}]$, $[\text{boolI}_{\text{tt}}]$, $[\times \text{I}]$, $[\times \text{E}_1]$, $[\rightarrow \text{I}^u]$, $[\rightarrow \text{E}]$. Chaque cas vaut 5 points.

COROLLAIRE 3. Si $\vdash M : A$, alors $\text{TH}_A(M)$.

Bisimulations pour CCS (30 points)

Le **calcul des systèmes communicants** (*calculus of communicating systems*, **CCS**) est une algèbre de processus introduite par Milner en 1980. Elle permet de raisonner de façon abstraite au sujet de processus communicants, tout comme le λ -calcul permet de raisonner au sujet de programmes fonctionnels.

Les processus peuvent faire des actions nommées. Les noms d'action sont des éléments $a, b, \dots \in \text{Noms}$. Les « conoms » d'action sont des éléments $\bar{a}, \bar{b}, \dots \in \overline{\text{Noms}}$.

Par exemple, un processus peut faire l'action de demander du thé (l'action nommée demThe), tandis qu'un autre peut faire l'action duale $\overline{\text{demThe}}$. Deux processus peuvent se synchroniser s'ils peuvent faire des actions duales a et $\bar{a}$. Donc, nos deux processus peuvent se synchroniser en faisant les actions demThe et $\overline{\text{demThe}}$. Lorsque deux processus parallèles se synchronisent, leur composition parallèle fait l'action de synchronisation τ .

On suppose que les ensembles Noms et $\overline{\text{Noms}}$ sont disjoints et que $(-): \text{Noms} \rightarrow \overline{\text{Noms}}$ est une bijection. On utilise aussi la notation $(-)$ pour son inverse, donc on écrit $\bar{\bar{a}} = a$. (Pour les mathématiques : $(-)$ induit une involution sur $\text{Noms} \cup \overline{\text{Noms}}$.) L'ensemble des actions possibles est $\text{Act} = \text{Noms} \cup \overline{\text{Noms}} \cup \{\tau\}$. On suppose que $\tau \notin \text{Noms} \cup \overline{\text{Noms}}$. On utilise μ comme metavariable pour les éléments $a, \bar{a}, b, \bar{b}, \dots \in \text{Noms} \cup \overline{\text{Noms}}$.

Les processus P sont générés par la grammaire suivante :

$P ::= 0$	Processus terminé
$ \mu.P$	Faire l'action $\mu \in \text{Noms} \cup \overline{\text{Noms}}$ et ensuite P
$ P_1 P_2$	Composition parallèle de P_1 et P_2
$ P_1 + P_2$	Choix non déterministe entre P_1 et P_2
$ \nu\mu.P$	Cacher μ et $\bar{\mu}$ depuis l'extérieur

L'opérateur $\nu\mu.P$ lie les noms μ et $\bar{\mu}$ dans P , tout comme $\lambda x.M$ lie x dans M .

La sémantique des processus est donnée par un système étiqueté de transition d'états défini par induction par les règles suivantes, où les états sont des processus et les actions sont des éléments $\alpha \in \text{Act}$:

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\mu.P \xrightarrow{\mu} P} [\text{ccs-act}] \quad \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P | Q \xrightarrow{\alpha} P' | Q} [\text{ccs-par-1}] \quad \frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P | Q \xrightarrow{\alpha} P | Q'} [\text{ccs-par-2}] \\
\\
\frac{P \xrightarrow{\mu} P' \quad Q \xrightarrow{\bar{\mu}} Q'}{P | Q \xrightarrow{\tau} P' | Q'} [\text{ccs-sync}] \quad \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P + Q \xrightarrow{\alpha} P'} [\text{ccs-sum-1}] \quad \frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P + Q \xrightarrow{\alpha} Q'} [\text{ccs-sum-2}] \\
\\
\frac{P \xrightarrow{\alpha} P' \quad \alpha \notin \{\mu, \bar{\mu}\}}{\nu\mu.P \xrightarrow{\alpha} \nu\mu.P'} [\text{ccs-hide}]
\end{array}$$

La règle **[ccs-act]** décrit faire une action nommée μ . Les processus dans une composition parallèle peuvent faire des actions indépendamment les uns des autres (règles **[ccs-par-1]** et **[ccs-par-2]**), et ils peuvent se synchroniser s'ils peuvent faire des actions nommées duales (règle **[ccs-sync]**). On peut faire un choix non déterministe entre deux processus qui peuvent faire des actions (règles **[ccs-sum-1]** et **[ccs-sum-2]**). La règle **[ccs-hide]** empêche un processus tiers de synchroniser avec P sur une action nommée μ ou $\bar{\mu}$. Par exemple, si $P = a.0 | \bar{a}.0$, alors la seule transition possible

pour $va.P$ est

$$\frac{\frac{\overline{a.0} \xrightarrow{a} 0}{[ccs-act]} \quad \frac{\overline{\bar{a}.0} \xrightarrow{\bar{a}} 0}{[ccs-act]}}{\frac{P \xrightarrow{\tau} 0 \mid 0}{[ccs-sync]}} \quad [ccs-hide]$$

$$\frac{P \xrightarrow{\tau} 0 \mid 0}{va.P \xrightarrow{\tau} va.(0 \mid 0)}$$

donc la composition parallèle $(va.P) \mid (a.B)$ ne peut pas faire d'action de synchronisation en utilisant l'action a .

Définition 4 (Bisimulation). Une **bisimulation** de processus est une relation $\mathcal{R}$ sur les processus telle que si $P \mathcal{R} Q$, alors pour toute action $\alpha \in \text{Act}$,

- si $P \xrightarrow{\alpha} P'$, alors il existe un Q' tel que $Q \xrightarrow{\alpha} Q'$ et $P' \mathcal{R} Q'$;
- si $Q \xrightarrow{\alpha} Q'$, alors il existe un P' tel que $P \xrightarrow{\alpha} P'$ et $P' \mathcal{R} Q'$.

La **bisimilarité** $\sim$ est l'union de toutes les bisimulations. Elle est elle-même une bisimulation.

Pour chacune des quatre questions suivantes, démontrez l'énoncé ou donnez un contre-exemple.

QUESTION 3 (5 points). *Pour tout processus P , $P + 0 \sim P$.*

QUESTION 4 (5 points). *Pour tout processus P_1, P_2, Q_1, Q_2 , si $P_1 \sim Q_1$ et $P_2 \sim Q_2$, alors $P_1 + P_2 \sim Q_1 + Q_2$.*

QUESTION 5 (10 points). *Pour tout processus P, Q et R , $(P + Q) \mid R \sim (P \mid R) + (Q \mid R)$.*

QUESTION 6 (10 points). *Pour tout processus P et Q , $\mu.(P + Q) \sim (\mu.P) + (\mu.Q)$.*

Points fixes (35 points plus 5 points bonis)

Définition 5. Soit $(P, \leq)$ et $(Q, \sqsubseteq)$ des ensembles partiellement ordonnés. Une fonction $f : P \rightarrow Q$ est **monotone** si pour tout $x, y \in P$, si $x \leq y$, alors $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

Définition 6. Un **treillis complet** (*complete lattice*) est un ensemble partiellement ordonné $(P, \leq)$ tel que tout sous-ensemble $S \subseteq P$ a un suprémum (plus petite borne supérieure) $\bigsqcup S \in P$.

PROPOSITION 7. Si P est un treillis complet, alors tout sous-ensemble $S \subseteq P$ a un infimum (plus grande borne inférieure) $\bigsqcap S \in P$.

PROPOSITION 8. Si $(P, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné et $x, y \in P$, alors :
 $x = \bigsqcap \{x, y\}$ si et seulement si $x \leq y$ si et seulement si $y = \bigsqcup \{x, y\}$.

THÉORÈME 9 (KNASTER-TARSKI). Soit $(L, \leq)$ un treillis complet et $f : L \rightarrow L$ une fonction monotone.

(1) Le treillis des points fixes de f est un treillis complet.

(2) Son infimum (le plus petit point fixe μf de f) est l'infimum des pré-points fixes de f :

$$\mu f = \bigsqcap \{x \in L \mid f(x) \leq x\}.$$

(3) Son suprémum (le plus grand point fixe νf de f) est le suprémum des post-points fixes de f :

$$\nu f = \bigsqcup \{x \in L \mid x \leq f(x)\}.$$

Une règle élémentaire sur un ensemble S est une paire $(\{x_1, \dots, x_n\}, x) \in \wp(S) \times S$ et s'écrit :

$$\frac{x_1 \quad \dots \quad x_n}{x}$$

Nos règles d'inférence sont souvent schématiques et donc une règle schématique avec des méta-variables représente un ensemble de règles élémentaires. Un ensemble $\mathcal{R} \subseteq \wp(S) \times S$ de règles élémentaires détermine une fonction monotone $\Phi_{\mathcal{R}} : \wp(S) \rightarrow \wp(S)$ sur le treillis complet $\wp(S)$, où :

$$\Phi_{\mathcal{R}}(Y) = \{z \in S \mid \exists (X, z) \in \mathcal{R}. X \subseteq Y\}.$$

(On peut déduire z à partir de Y s'il existe une règle (X, z) où les prémisses X sont justifiées par les éléments de Y .) **L'ensemble défini inductivement** par les règles $\mathcal{R}$ est le plus petit point fixe $\mu(\Phi_{\mathcal{R}})$. **L'ensemble défini coinductivement** par les règles $\mathcal{R}$ est le plus grand point fixe $\nu(\Phi_{\mathcal{R}})$.

QUESTION 7 (5 points). On voit parfois des règles « culte du cargo » de la forme suivante :

$$\frac{x_1 \quad \dots \quad x_n \quad \neg y_1 \quad \dots \quad \neg y_m}{z}$$

L'intention de ces règles est qu'on peut déduire z si on peut déduire $x_1, \dots, x_n$ mais pas $y_1, \dots, y_m$. Une telle règle élémentaire avec négation correspond à un tuple $(\{x_1, \dots, x_n\}, \{y_1, \dots, y_m\}, z)$. Un ensemble $\mathcal{R}$ de telles règles détermine une fonction $\Psi_{\mathcal{R}} : \wp(S) \rightarrow \wp(S)$, où

$$\Psi_{\mathcal{R}}(W) = \{z \in S \mid \exists (X, Y, z) \in \mathcal{R}. X \subseteq W \wedge Y \cap W = \emptyset\}.$$

(On peut déduire z à partir de W s'il existe une règle (X, Y, z) où W justifie X mais ne permet pas de justifier des hypothèses parmi Y .) En général, peut-on utiliser le théorème Knaster-Tarski pour calculer son plus petit et son plus grand point fixe ? **Justifiez.**

QUESTION 8 (5 points). Soit $S = \{a, b, c\}$. Soit la fonction $\Psi_{\mathcal{R}} : \wp(S) \rightarrow \wp(S)$ induite par les règles élémentaires avec négation suivantes :

$$\frac{}{\bar{a}} \quad \frac{\neg b}{c} \quad \frac{\neg c}{b}$$

Si $\Psi_{\mathcal{R}}$ a un plus petit point fixe, donnez-le. Sinon, démontrez que ce n'est pas le cas. Si $\Psi_{\mathcal{R}}$ a un plus grand point fixe, donnez-le. Sinon, démontrez que ce n'est pas le cas.

Le théorème Knaster-Tarski ne donne pas de procédure pour calculer les points fixes. Cependant, en supposant des hypothèses plus fortes, le théorème de points fixes de Kleene nous permettra de les calculer. Pour les paires de définitions qui suivent, vous observerez que les deux définitions dans chaque paire sont duales (il suffit d'échanger « plus grand que » par « plus petit que », ou vice-versa).

Définition 10 (ω -chaînes). Soit $(P, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné.

- Une ω -**chaîne ascendante** $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ en P est une séquence d'éléments $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$ telle que $x_i \leq x_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.
- Une ω -**chaîne descendante** $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ en P est une séquence d'éléments $\dots \leq x_2 \leq x_1 \leq x_0$ telle que $x_{i+1} \leq x_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Définition 11 (ω -(co)complétude). Soit $(P, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné.

- Il est ω -**complet** si toute ω -chaîne ascendante $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ a un suprémum $\bigsqcup_{i=0}^{\infty} x_i$ en P .
- Il est ω -**cocomplet** si toute ω -chaîne descendante $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ a un infimum $\bigsqcap_{i=0}^{\infty} x_i$ en P .

Exemple 12. L'ensemble $(\mathbb{N}, \leq)$ est ω -cocomplet. Il n'est pas ω -complet, car l' ω -chaîne ascendante $0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq \dots$ n'a pas de suprémum.

Exemple 13. Tout treillis complet est ω -complet et ω -cocomplet.

Définition 14 (ω -(co)continuité). Soit P et Q des ensembles partiellement ordonnés.

- S'ils sont ω -complets, alors une fonction $f : P \rightarrow Q$ est ω -**continue** si

$$f\left(\bigsqcup_{i=0}^{\infty} x_i\right) = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} f(x_i)$$

pour toute ω -chaîne ascendante $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

- S'ils sont ω -cocomplets, alors une fonction $f : P \rightarrow Q$ est ω -**cocontinue** si

$$f\left(\bigsqcap_{i=0}^{\infty} x_i\right) = \bigsqcap_{i=0}^{\infty} f(x_i)$$

pour toute ω -chaîne descendante $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

QUESTION 9 (5 points). Démontrez que si f est ω -continue ou ω -cocontinue, alors f est monotone. Indice : s'inspirer de la proposition 8.

Soit $f : P \rightarrow P$ une fonction. Les itérées $f^n : P \rightarrow P$ de f sont les fonctions $f^0(x) = x$ et $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$.

THÉORÈME 15 (KLEENE). Soit P un ensemble partiellement ordonné.

Si P est ω -complet et a un plus petit élément $\perp$, alors toute fonction ω -continue $f : P \rightarrow P$ a un plus petit point fixe :

$$\mu f = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\perp).$$

Si P est ω -cocomplet et a un plus grand élément $\top$, alors toute fonction ω -cocontinue $f : P \rightarrow P$ a un plus grand point fixe :

$$\nu f = \bigsqcap_{i=0}^{\infty} f^i(\top).$$

QUESTION 10 (5 points). Soit P un ensemble ω -cocomplet avec un plus grand élément $\top$ et $f : P \rightarrow P$ une fonction ω -cocontinue. Démontrez que $\nu f = \bigsqcap_{i=0}^{\infty} f^i(\top)$ est un point fixe de f .

QUESTION 11 (5 points). Soit P un ensemble ω -cocomplet avec un plus grand élément $\top$ et $f : P \rightarrow P$ une fonction ω -cocontinue. Démontrez que $\nu f = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\top)$ est le plus grand point fixe de f . En d'autres termes, démontrez que si $f(x) = x$, alors $x \leq \nu f$.

Nos règles induisent généralement des fonctions ω -continues et ω -cocontinues. Si chaque règle a un nombre fini de prémisses, alors $\Phi_{\mathcal{R}}$ est ω -continue. Dualelement, si chaque élément est la conclusion d'un nombre fini de règles, alors $\Phi_{\mathcal{R}}$ est ω -cocontinue.

PROPOSITION 16. Soit $\mathcal{R} \subseteq \wp(S) \times S$ un ensemble de règles et $\Phi_{\mathcal{R}} : \wp(S) \rightarrow \wp(S)$ la fonction induite par ces règles.

- Si pour tout $(X, x) \in \mathcal{R}$, X est un ensemble fini, alors $\Phi_{\mathcal{R}}$ est ω -continue.
- Si pour tout $x \in S$, $\{ (Y, y) \in \mathcal{R} \mid y = x \}$ est un ensemble fini, alors $\Phi_{\mathcal{R}}$ est ω -cocontinue.

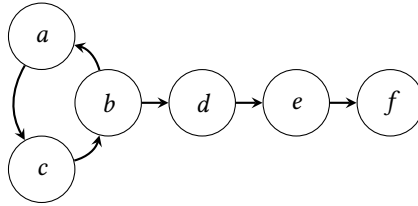
QUESTION 12 (5 points bonis). Démontrez une des deux parties de la proposition 16.

On a défini en classe le judgement coinductif suivant sur les états d'un système de transition d'états :

$\boxed{P \uparrow}$ P a une trace infinie

$$\frac{P \longrightarrow Q \quad Q \uparrow}{P \uparrow}$$

QUESTION 13 (5 points). Soit le système de transition d'états :



Utilisez le théorème de Kleene pour calculer l'ensemble des états P tels que $P \uparrow$. Justifiez vos calculs.

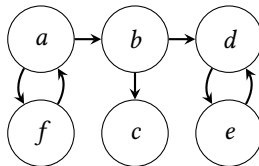
On a défini en classe le judgement inductif suivant sur les états d'un système de transition d'états :

$\boxed{P \downarrow}$ P a une trace finie

$$\frac{P \not\rightarrow}{P \downarrow} \quad \frac{P \longrightarrow Q \quad Q \downarrow}{P \downarrow}$$

(La syntaxe $P \not\rightarrow$ signifiait qu'il n'y a pas de transitions possibles à partir de P).

QUESTION 14 (5 points). Soit le système de transition d'états :



Utilisez le théorème de Kleene pour calculer l'ensemble des états P tels que $P \downarrow$. Justifiez vos calculs.