

INF9340 Devoir 3

Ce devoir est à remettre sur papier au secrétariat ou par courriel en format PDF avant 23h59 le dimanche 1er mars, 2026. Assurez-vous d'inclure votre nom et code permanent. Un gabarit LaTeX est fourni. Tous les problèmes sont assujettis à la politique du tableau noir (voir le site web du cours pour les détails de cette politique). N'oubliez pas que si vous utilisez la politique du tableau noir, vous devez indiquer avec qui vous avez collaboré.

Définitions clefs

Une *réduction* sur les éléments de T est tout simplement une relation binaire $\mathcal{R} \subseteq T \times T$, et l'on écrit $M \longrightarrow_{\mathcal{R}} N$ si $(M, N) \in \mathcal{R}$. On appelle $\longrightarrow_{\mathcal{R}}$ la $\mathcal{R}$ -réduction.

On écrit $\longrightarrow_{\mathcal{R}}^*$ pour la clôture réflexive et transitive de $\longrightarrow_{\mathcal{R}}$. Elle est définie par induction par les règles suivantes, où $M, M', N \in T$:

$$\begin{array}{c} \frac{M \longrightarrow_{\mathcal{R}} N}{M \longrightarrow_{\mathcal{R}}^* N} \text{ (STEPS/STEP)} \quad \frac{}{M \longrightarrow_{\mathcal{R}}^* M} \text{ (STEPS/REFL)} \\ \frac{M \longrightarrow_{\mathcal{R}}^* M' \quad M' \longrightarrow_{\mathcal{R}}^* N}{M \longrightarrow_{\mathcal{R}}^* N} \text{ (STEPS/TRANS)} \end{array}$$

La $\mathcal{R}$ -réduction satisfait la *propriété du diamant* si pour tout $M, N_1, N_2 \in T$, si $M \longrightarrow_{\mathcal{R}} N_1$ et $M \longrightarrow_{\mathcal{R}} N_2$, alors il existe un $N \in T$ tel que $N_1 \longrightarrow_{\mathcal{R}} N$ et $N_2 \longrightarrow_{\mathcal{R}} N$.

La $\mathcal{R}$ -réduction est *confluente* si $\longrightarrow_{\mathcal{R}}^*$ satisfait la propriété du diamant.

La $\mathcal{R}$ -équivalence $\equiv_{\mathcal{R}}$ est l'équivalence générée par $\longrightarrow_{\mathcal{R}}^*$. Elle est définie par induction par les règles suivantes, où $M, M', N \in T$:

$$\frac{M \longrightarrow_{\mathcal{R}}^* N}{M \equiv_{\mathcal{R}} N} \text{ (EQUIV/STEPS)} \quad \frac{N \equiv_{\mathcal{R}} M}{M \equiv_{\mathcal{R}} N} \text{ (EQUIV/SYM)} \quad \frac{M \equiv_{\mathcal{R}} M' \quad M' \equiv_{\mathcal{R}} N}{M \equiv_{\mathcal{R}} N} \text{ (EQUIV/TRANS)}$$

Un élément $M \in T$ est $\mathcal{R}$ -normal s'il n'y a pas de $N \in T$ tel que $M \longrightarrow_{\mathcal{R}} N$. La $\mathcal{R}$ -réduction est *faiblement normalisante* si pour tout M il existe un N qui est $\mathcal{R}$ -normal tel que $M \longrightarrow_{\mathcal{R}}^* N$. La $\mathcal{R}$ -réduction est *fortement normalisante* si pour tout $M \in T$, il n'y a pas de séquence infinie de $\mathcal{R}$ -réductions à partir de M .

Questions générales

Mêmes si nous nous intéressons aux β - et η -réductions et équivalences dans notre cours, plusieurs de leurs propriétés sont des propriétés générales des systèmes de réécriture.

QUESTION 1 (10 points). Soit $\mathcal{R}$ une réduction confluente. Démontrez que si $M \equiv_{\mathcal{R}} N$, alors il existe un L tel que $M \longrightarrow_{\mathcal{R}}^* L$ et $N \longrightarrow_{\mathcal{R}}^* L$.

La $\mathcal{R}$ -réduction est *faiblement confluente* si pour tout $M, N_1, N_2 \in T$, si $M \longrightarrow_{\mathcal{R}} N_1$ et $M \longrightarrow_{\mathcal{R}} N_2$, alors il existe un $N \in T$ tel que $N_1 \longrightarrow_{\mathcal{R}}^* N$ et $N_2 \longrightarrow_{\mathcal{R}}^* N$.

QUESTION 2 (10 points). Démontrez que si la $\mathcal{R}$ -réduction est faiblement confluente et fortement normalisante, alors elle est confluente.

En classe, nous avons vu que si une réduction satisfait la propriété du diamant, alors elle est confluente (c'était l'argument où l'on collait des diamants pour former des lanières et des lanières pour former des gros diamants). Ensuite on a démontré que la β -réduction était confluente en démontrant que la réduction parallèle $\Rightarrow$ satisfait la propriété du diamant, où la réduction parallèle est une relation $\Rightarrow$ particulière telle que $(\longrightarrow_{\beta}) \subseteq (\Rightarrow) \subseteq (\longrightarrow_{\beta}^*)$. La question suivante vous demande de justifier de façon générale cette étape de la démonstration :

QUESTION 3 (5 points). Démontrez que si $(\longrightarrow_{\mathcal{R}}) \subseteq (\longrightarrow_S) \subseteq (\longrightarrow_{\mathcal{R}}^*)$ (en tant que relations) et si $\longrightarrow_S$ satisfait la propriété du diamant, alors la $\mathcal{R}$ -réduction est confluente.

En classe, on a démontré que la β -réduction était confluente pour le fragment avec l'implication et la conjonction. Les prochaines questions vous demandent de démontrer qu'elle est confluente pour le fragment avec l'implication et le produit stricte ($A \otimes B$) du devoir 1. Pour vous aider, voici les β -réductions pour ce fragment, qui sont définies par induction par les règles suivantes :

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{(\lambda x.M)N \longrightarrow_{\beta} [N/x]M} \quad \frac{M \longrightarrow_{\beta} M'}{\lambda x.M \longrightarrow_{\beta} \lambda x.M'} \quad \frac{M \longrightarrow_{\beta} M'}{MN \longrightarrow_{\beta} M'N} \quad \frac{N \longrightarrow_{\beta} N'}{MN \longrightarrow_{\beta} MN'} \\
 \\
 \frac{M \longrightarrow_{\beta} M'}{\langle M, N \rangle \longrightarrow_{\beta} \langle M', N \rangle} \quad \frac{N \longrightarrow_{\beta} N'}{\langle M, N \rangle \longrightarrow_{\beta} \langle M, N' \rangle} \\
 \\
 \frac{M \longrightarrow_{\beta} M'}{\text{split } M \{ \langle x, y \rangle \hookrightarrow N \} \longrightarrow_{\beta} \text{split } M' \{ \langle x, y \rangle \hookrightarrow N \}} \\
 \\
 \frac{N \longrightarrow_{\beta} N'}{\text{split } M \{ \langle x, y \rangle \hookrightarrow N \} \longrightarrow_{\beta} \text{split } M \{ \langle x, y \rangle \hookrightarrow N' \}} \\
 \\
 \frac{}{\text{split } \langle M_1, M_2 \rangle \{ \langle x_1, x_2 \rangle \hookrightarrow N \} \longrightarrow_{\beta} [M_1, M_2/x_1, x_2]N}
 \end{array}$$

QUESTION 4 (10 points). Définissez les réductions parallèles $M \Longrightarrow N$ pour ce fragment. Vu que les réductions parallèles pour l'implication seront identiques à celles vues en classe, il suffit de remettre les réductions pour le produit stricte (les réductions de la forme $\langle M, N \rangle \Longrightarrow M'$ et de la forme $\text{split } M \{ \langle x, y \rangle \hookrightarrow N \} \Longrightarrow M'$). Vos réductions doivent satisfaire les propriétés suivantes :

- (1) si $M \longrightarrow_{\beta} N$, alors $M \Longrightarrow N$;
- (2) si $M \Longrightarrow N$, alors $M \longrightarrow_{\beta}^* N$;
- (3) $M \Longrightarrow M$ pour tout M ;
- (4) si $M \Longrightarrow M'$ et $N \Longrightarrow N'$, alors $[N/x]M \Longrightarrow [N'/x]M'$.

Vous n'êtes pas obligés de remettre une démonstration de ces propriétés.

Pour les prochaines deux questions, vous pouvez vous référer à l'article de Takahashi.¹

QUESTION 5 (10 points). Définissez $\langle M, N \rangle^{\circ}$ et $\text{split } M \{ \langle x, y \rangle \hookrightarrow N \}^{\circ}$.

QUESTION 6 (10 points). Démontrez que si $M \Longrightarrow N$, alors $N \Longrightarrow M^{\circ}$. La démonstration se fait par induction sur M . Remettez seulement les cas pour $\langle M_1, M_2 \rangle$ et $\text{split } M_1 \{ \langle x, y \rangle \hookrightarrow M_2 \}$. Vous pouvez supposer les propriétés énumérées à la question 4.

1. Voir <https://doi.org/10.1006/inco.1995.1057> . Notez que Takahashi écrit M^* au lieu de M° .