

INF9340 Devoir 2

Ce devoir est à remettre sur papier au secrétariat ou par courriel en format PDF avant 23h59 le dimanche 15 février, 2026. Les questions d'implémentation doivent être remises par courriel comme pièces jointes. Assurez-vous d'inclure votre nom et code permanent. Un gabarit LaTeX est fourni. Tous les problèmes sont assujettis à la politique du tableau noir (voir le site web du cours pour les détails de cette politique). N'oubliez pas que si vous utilisez la politique du tableau noir, vous devez indiquer avec qui vous avez collaboré.

1 Typage bidirectionnel (faire 20 points des 50 points possibles)

Attention! Ne faites pas toutes les questions de cette section! Il suffit de faire 20 points sur les 50 points disponibles. De plus, certaines démonstrations ont des *douzaines de cas*. Je vous demande seulement de remettre certains cas. (Si vous souhaitez vous amuser, vous pouvez faire plus que ce qui est demandé et je vous ferai des commentaires, mais vous devez indiquer les questions que vous souhaitez que je compte pour la note du devoirs.)

QUESTION 1 (5 points). *Nous avons utilisé le type τ option dans notre implémentation de la fonction de synthèse. On peut lui donner une interprétation logique sous la forme de la proposition ?A. Elle a les règles d'introduction et d'élimination, et les témoins suivants :*

$$\frac{M : A}{\text{some}(M) : ?A} \text{ (?I}_1) \quad \frac{}{\text{none} : ?A} \text{ (?I}_2) \quad \frac{\overline{x : A}^x \quad \vdots \quad M : ?A \quad N : B \quad P : B}{\text{which}(M; N; x.P) : B} \text{ (?E}^x)$$

et les réductions et expansions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{which}(\text{none}; N; x.P) &\longrightarrow_{\beta} N \\ \text{which}(\text{some}(M); N; x.P) &\longrightarrow_{\beta} [M/x]P \\ M : ?A &\longrightarrow_{\eta} \text{which}(M; \text{none}; x.\text{some}(x)) \end{aligned}$$

Donnez les règles de typage bidirectionnel correspondantes, c'est-à-dire, des règles qui définissent $M \Leftarrow A$ et $M \Rightarrow A$ pour ces constructeurs et destructeurs. Justifiez en une ou deux phrases pourquoi elles sont bien modées (well-moded).

QUESTION 2 (5 points). Démontrez ou donnez un contre-exemple : pour tout M , si $M \Leftarrow A$ et $M \Leftarrow B$, alors $A = B$.

QUESTION 3 (10 points). Nous avons vu deux codages différents de notre langage pour la vérification de typage bidirectionnelle : les noms explicites et la syntaxe abstraite d'ordre supérieur. Cette question vous demande d'implémenter la vérification pour un troisième codage à base d'indices de de Bruijn. Les indices de de Bruijn sont une approche pour simplifier l'implémentation de variables liées. En particulier, elles évitent de devoir renommer les variables pour éviter la capture lors de la substitution.

Un indice de de Bruijn remplace un nom de variable par un nombre naturel qui identifie le lieu de la variable en indiquant le nombre de lieux entre la variable et son lieu dans l'arbre syntaxique. Par

exemple, on a les codages suivants, où l'on utilise des couleurs pour faciliter la lecture :

$$\begin{aligned}
 \lambda x. \lambda y. \lambda z. z &\rightsquigarrow \lambda \lambda \lambda 0 \\
 \lambda x. \lambda y. \lambda z. y &\rightsquigarrow \lambda \lambda \lambda 1 \\
 \lambda x. \lambda y. \lambda z. x &\rightsquigarrow \lambda \lambda \lambda 2 \\
 \lambda x. \lambda y. \lambda z. xzy &\rightsquigarrow \lambda \lambda \lambda 201 \\
 \lambda x. (\lambda y. \lambda z. xz)x &\rightsquigarrow \lambda (\lambda \lambda 20)0
 \end{aligned}$$

Pour les variables libres qui font référence à une hypothèse dans un contexte ordonné, l'indice compte le nombre de lieux entre la variable et l'extérieur du terme, plus le nombre d'hypothèses entre le début du contexte et l'hypothèse à laquelle la variable fait référence. Par exemple, si on lit les contextes de droite à gauche (puisque l'on ajoute toujours les nouvelles hypothèses à la droite du contexte dans nos règles), alors :

$$\begin{array}{lll}
 z : C, y : B, x : A \vdash x : A & \rightsquigarrow & C, B, A \vdash 0 : A \\
 z : C, y : B, x : A \vdash y : B & \rightsquigarrow & C, B, A \vdash 1 : B \\
 z : C, y : B, x : A \vdash z : C & \rightsquigarrow & C, B, A \vdash 2 : C \\
 y : D \supset B, x : A \vdash \lambda w. w : D \supset D & \rightsquigarrow & D \supset B, A \vdash \lambda 0 : D \supset B \\
 y : D \supset B, x : A \vdash \lambda w. x : D \supset A & \rightsquigarrow & D \supset B, A \vdash \lambda 1 : D \supset A \\
 y : D \supset B, x : A \vdash \lambda w. yw : D \supset B & \rightsquigarrow & D \supset B, A \vdash \lambda 20 : D \supset B
 \end{array}$$

Utilisez ce codage pour implémenter l'algorithme de vérification bidirectionnelle pour l'entière du langage. Vous pouvez vous baser sur les règles avec les contextes explicites des notes de cours. Veuillez inclure au moins un test par règle d'inférence implémentée.

Si vous êtes ambitieux ou ambitieuses, vous pouvez décrire ou implémenter la substitution dans ce codage. Ça ne comptera pas pour votre note, mais ça vous méritera des autocollants supplémentaires lors de la correction.

QUESTION 4 (10 points). Pour cette question, on se limite au fragment $A, B ::= \alpha \mid \top \mid A \wedge B \mid A \supset B$. En classe, on a dit que les annotations étaient seulement nécessaires pour typer les termes réductibles. En fait, un terme peut être typé par l'algorithme bidirectionnel sans annotations si et seulement si il est normal (irréductible). Les termes normaux N et neutres R sont définis par la grammaire :

$$\begin{aligned}
 N &::= R \mid \langle \rangle \mid \langle N_1, N_2 \rangle \mid \lambda x. N \\
 R &::= x \mid \text{fst}(R) \mid \text{snd}(R) \mid RN
 \end{aligned}$$

(Vous pouvez tenir pour acquis qu'un terme est irréductible si et seulement si il a la forme N . Les termes neutres sont une sous-classe des termes normaux où l'on applique un destructeur à une variable.)

Si $\Gamma = x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$, on écrit $\Gamma \Rightarrow$ pour $x_1 \Rightarrow A_1, \dots, x_n \Rightarrow A_n$. Démontrez que pour tout contexte Γ , terme M , et type A que

- (1) $\Gamma \Rightarrow \vdash M \Leftarrow A$ sans utiliser la règle [Anno] seulement si $\Gamma \vdash M : A$ et M est normal;
- (2) $\Gamma \Rightarrow \vdash M \Rightarrow A$ sans utiliser la règle [Anno] seulement si $\Gamma \vdash M : A$ et M est neutre.

(La démonstration des implications réciproques ne sont pas demandées.)

QUESTION 5 (20 points). Nous démontrerons que la vérification de typage bidirectionnelle est décidable. On se limite au fragment :

$$\begin{aligned}
 A, B &::= \alpha \mid A \supset B \\
 M, N &::= x \mid \lambda x. M \mid MN \mid (M : A)
 \end{aligned}$$

où α et x représentent n'importe quelles variables propositionnelles ou variables de termes. On écrit $\Gamma \Rightarrow$ pour un contexte de la forme $x_1 \Rightarrow A_1, \dots, x_n \Rightarrow A_n$ où $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.

- (1) Donnez des règles qui définissent inductivement un jugement $M \Leftarrow A$ qui veut dire qu'on ne peut pas démontrer $M \Leftarrow A$ et un jugement $M \Rightarrow$ qui veut dire que M ne synthétise aucun type. Comme point de départ, je vous offre les règles suivantes :

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow \vdash \lambda x.M \Rightarrow} \quad \frac{}{\Gamma \Rightarrow \vdash \lambda x.M \Leftarrow \alpha} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow, x \Rightarrow A \vdash M \Leftarrow B}{\Gamma \Rightarrow \vdash \lambda x.M \Leftarrow A \supset B}$$

Remettez toutes vos règles.

- (2) Démontrez par induction sur M que pour tout contexte $\Gamma \Rightarrow$ et tout terme M :
- (a) soit il existe un unique A tel que $\Gamma \Rightarrow \vdash M \Rightarrow A$, ou $\Gamma \Rightarrow \vdash M \Rightarrow$, mais pas les deux; et
 - (b) pour tout A , soit $\Gamma \Rightarrow \vdash M \Leftarrow A$ ou $\Gamma \Rightarrow \vdash M \Leftarrow A$, mais pas les deux.

Remettez seulement les cas où $M = \lambda x.M'$.

Puisque votre démonstration sera (on espère!) constructive, on peut y extraire un algorithme récursif qui permet de décider si $M \Leftarrow A$ ou pas.

2 Calcul des séquents (25 points)

QUESTION 6 (15 points). En classe, on a commencé la démonstration que la coupure est admissible, c'est-à-dire, que si $\Gamma \xRightarrow{\mathcal{D}} A$ et $\Gamma, A \xRightarrow{\mathcal{E}} C$, alors il existe une dérivation $\Gamma \xRightarrow{\mathcal{F}} C$. La démonstration se fait par induction lexicographique sur $(A, \mathcal{D}, \mathcal{E})$. Faites un cas de chaque catégorie de cas pour $A = A_1 \vee A_2$:

- (1) un cas où A est la proposition principale de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{D} = \left(\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma \xRightarrow{} A_1} (\vee R_1) \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \left(\frac{\Gamma, A_1 \vee A_2, A_1 \xRightarrow{} C \quad \Gamma, A_1 \vee A_2, A_2 \xRightarrow{} C}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \xRightarrow{} C} (\vee L) \right)$$

- (2) un cas où A n'est pas la proposition principale de $\mathcal{D}$: où $\Gamma = \Gamma', B_1 \wedge B_2$,

$$\mathcal{D} = \left(\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma', B_1 \wedge B_2, B_1 \xRightarrow{} A_1 \vee A_2} (\wedge L_1) \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \left(\frac{\Gamma, A_1 \vee A_2, A_1 \xRightarrow{} C \quad \Gamma, A_1 \vee A_2, A_2 \xRightarrow{} C}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \xRightarrow{} C} (\vee L) \right)$$

- (3) un cas où A n'est pas la proposition principale de $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{D} = \left(\frac{\mathcal{D}_1}{\Gamma \xRightarrow{} A_1} (\vee R_1) \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \left(\frac{\Gamma, A_1 \vee A_2 \xRightarrow{} B_1 \quad \Gamma, A_1 \vee A_2 \xRightarrow{} B_2}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \xRightarrow{} B_1 \wedge B_2} (\wedge R) \right)$$

On peut inclure la règle gauche de conjonction que Jean a proposée, qui correspond au produit strict. Pour éviter la confusion, on écrit $A \otimes B$ au lieu de $A \wedge B$ pour cette variante.

$$\frac{\Gamma, A \otimes B, A, B \xRightarrow{} C}{\Gamma, A \otimes B \xRightarrow{} C} (\otimes L) \quad \frac{\Gamma \xRightarrow{} A \quad \Gamma \xRightarrow{} B}{\Gamma \xRightarrow{} A \otimes B} (\otimes R)$$

QUESTION 7 (10 points). On a mentionné en classe que l'admissibilité de la coupure correspondait à la correction globale pour notre système de vérifications et d'utilisations. La complétude globale a aussi un analogue : l'admissibilité de la règle d'identité générale, c'est-à-dire, que $\Gamma, A \xRightarrow{} A$ pour tout A . Démontrez cette propriété par induction sur A . **Remettez seulement les cas où A une des formes $\top, B \vee C$, ou $B \otimes C$.**

Mises à jour

- Le 6 février : correction de faute de frappe dans l'exemple de codage de de Bruijn.